جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

بنام خدا

ماخ

دفترچه سؤالات و پاسخ تشریحی
مرحله اول
پانزدهمین دوره‌ی المپیاد کامپیوتر سال ۱۳۸۳

تعداد سوالات		مدت آزمون (دقیقه)
سوالات چند گزینه‌ای	مساله‌های تشریحی	
۴۰	-	۲۴۰

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

تذکرات آزمون:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:

- این آزمون شامل **۴۰ سؤال چند گزینه‌ای** و وقت آن **۲۴۰ دقیقه** است.
- استفاده از ماشین‌حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز **نیست**.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سوالات توسط **کمیته‌ی اجرایی ماخ** انجام شده است.

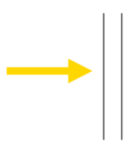
۱- ۱۰۰ کار قرار است توسط ۱۰ نفر اجرا شوند. زمان اجرای هر کار از قبل مشخص است. می‌خواهیم کارهایی که هر مجری باید انجام دهد را مشخص کنیم. فرض کنید افراد مجری دقیقاً مثل هم عمل می‌کنند. مثلاً اگر در زمان صفر دو کار به ترتیب با زمان‌های ۱۰ دقیقه و ۲۰ دقیقه را به یک مجری دهیم، او کار اول را دقیقاً در زمان ۱۰ دقیقه و دومی را در زمان ۳۰ دقیقه تمام می‌کند. الگوریتم زیر را برای تخصیص کارها به مجریان در نظر می‌گیریم.فرض می‌کنیم در ابتدا (زمان صفر) همه‌ی مجریان بی‌کار و آماده‌ی اجرای کارهای تخصیص داده‌شده‌اند.

۱) همه‌ی کارها را به ترتیب زمان‌های اجرایشان به‌صورت صعودی مرتب کن و به همین ترتیب مورد بررسی قرار بده،
۲) کار مورد بررسی را به مجری‌ای بده که کارهایی که قرار است انجام دهد زودتر از بقیه تمام می‌شود.

فرض کنید که مجموع زمان‌های اجرای همه‌ی کارها ۱۰,۰۰۰دقیقه و زمان اجرای طولانی‌ترین کار ۲۰۰ دقیقه است. بیش‌ترین زمانی که همه‌ی کارها تمام می‌شود حداکثر چند دقیقه است؟

الف) ۱,۱۸۰ ب) ۱,۵۰۰ ج) ۹۸۰ د) ۲,۰۰۰ هـ) ۱,۰۰۰

۲- دو شیشه موازی با هم داده شده‌اند. از سمت چپ به این دو ۱۰۰ واحد نور می‌تابانیم.
می‌دانیم هر یک از این شیشه‌ها اگر ۱۰۰ واحد نور دریافت کند، ۲۰ واحد آن را در جهت عکس تابش بر می‌گرداند، ۱۰ واحد را جذب می‌کند و ۷۰واحد دیگر را در همان جهت تابش از خود عبور می‌دهد. چند واحد نور به سمت راست شیشه‌ها منتقل می‌شود؟



الف) ۴۹ ب) $۴۹+\frac{۴۹}{۴}$ ج) $۴۹+\frac{۴\times۴۹}{۱۰۰}$ د) ۷۰ هـ) $۴۹+\frac{۴\times۴۹}{۹۶}$

۳- به چند طریق عدد ۸ را می‌توان به‌صورت $a+۲\times b+۴\times c+۸\times d$ نوشت که در آن a، b، c و d دارای مقادیر صفر، ۱ یا ۲ هستند؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ هـ) ۸

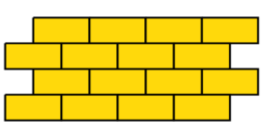
۴- مهره‌ای بر روی نقطه‌ی مبدأ صفحه‌ی مختصات قرار دارد. در هر حرکت می‌توانیم مهره را از نقطه‌ی (x,y) به نقطه‌ی $(x+۱,y+۱)$ یا به نقطه‌ی $(x,y-۱)$ ببریم. به چند طریق می‌توانیم این مهره را به نقطه‌ی (۴,۰) برسانیم؟

الف) ۳۵ ب) ۱۶ ج) ۲۵۶ د) ۷۰ هـ) به نامتناهی روش

۵- ۵ گونی شکر به وزن‌های ۴،۴،۳،۲ و۶ و یک گونی خالی داده‌شده‌اند. می‌خواهیم همه‌ی شکرها را در یک گونی بریزیم. هر بار می‌توانیم یک عمل«ادغام» انجام دهیم. هر ادغام یعنی انتخاب دو عدد از گونی‌های شکر ، مثلاً با وزن‌های a وb و یک گونی خالی، و ریختن کامل شکرهای دو گونی در گونی خالی. فرض کنید که هزینه‌ی انجام این ادغام برابر a+b باشد. کم‌ترین هزینه‌ی کل انجام این کار چه قدر است؟

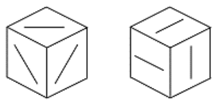
الف) ۱۹ ب) ۴۳ ج) ۴۶ د) ۵۱ هـ) ۶۰

۶- به چند طریق می‌توان آجرهای شکل مقابل را با ۳ رنگ رنگ‌آمیزی کرد به‌طوری‌که هیچ دو آجر مجاوری هم‌رنگ نباشند.



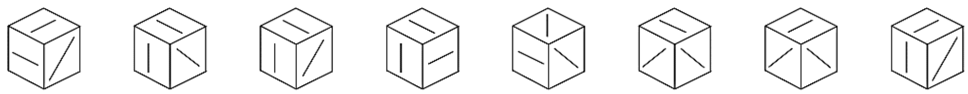
الف) $۳^{۴}$ ب) ۳×۲^{۱۵} ج) ۳ د) $۲^{۱۲}\times۳^{۴}$ هـ) ۶

۷- بر روی هر یک از وجه‌های یک مکعب پاره‌خطی رسم کرده‌ایم، به‌طوری‌که هیچ دو پاره‌خطی در فضا موازی نیستند. این دو مکعب از دو گوشه (با مقداری دوران) به شکل‌های روبرو دیده می‌شوند:



چند تا از شکل‌های زیر ممکن است، با مقداری دورانِ این مکعب ، از گوشه‌ای از آن دیده شوند؟

الف) ۲ ب) ۳ ج) ۴ د) ۵ هـ) ۶



۸- آرش و آرمین با هم این بازی را انجام می‌دهند: آرش یک عددِ x بین ۱ و ۱۳۸۴ انتخاب می‌کند و آرمین سعی می‌کند این عدد را حدس بزند. در هر مرحله آرمین یک عدد می‌گوید و آرش رابطه‌ی این عدد را نسبت به x (بزرگ‌تر، کوچک‌تر یا مساوی) را مشخص می‌کند. اگر عدد آرمین از ۲x کوچک‌تر و بزرگ‌تر یا مساویِ x باشد، آرمین برنده است. می‌خواهیم بدانیم کم‌ترین تعداد مرحله‌ی بازی که آرمین مطمئن است x هر چه که باشد، در این تعداد مرحله او بازی را خواهد برد ، چند تاست؟

الف) ۶۹۲ ب) ۱۰ ج) ۹ د) ۴ هـ) ۳

۹- دنباله‌ای از اعداد ۱تا ۱۳۸۳ را از چپ به راست نوشته‌ایم:

۱,۲,۳,۴,...,۱۰,۱۱,۱۲,...,۱۳۸۲,۱۳۸۳

از سمت چپ شروع می‌کنیم و به تعداد رقم یکان عدد فعلی جلو می‌رویم. بنابراین اعدادی که به آن‌ها بر می‌خوریم، عبارتند از ... ,۸ ,۴ ,۲ ,۱ تعداد این اعداد چندتاست؟

الف) ۲۳۱ ب) ۳۴۶ ج) ۳۴۵ د) ۲۷۷ هـ) ۲۷۸

۱۰- دو نفر این بازی را انجام می‌دهند: هر نفر در نوبت خود، یک رقم از مجموعه‌ی{۱,۲,۳,۴,۵} را بر روی کاغذ می‌نویسد و بازی پس از نوشتن رقم n ام خاتمه می‌یابد. نفر دوم قصد دارد کاری کند که در انتها مجموع ارقام نوشته شده بر ۹ بخش‌پذیر باشد. ولی نفر اول می‌خواهد از این کار جلوگیری کند. به ازای چه مقدار n نفر دوم می‌تواند حتماً به هدف خود برسد؟

الف) ۱۳۸۲ ب) ۱۳۸۳ ج) ۱۳۸۴ د) ۱۳۸۶ هـ) ۱۳۸۸

۱۱- N یک عدد ۱۳۸۳ رقمی با رقمِ چپ ۶ است. اگر هر دو رقم متوالی N را به‌عنوان یک عدد دو رقمی در نظر بگیریم ، این عدد یا مضرب ۱۷ است یا مضرب ۲۳. کدام گزینه زیر می‌تواند رقم راست N باشد؟

الف) ۱ ب) ۳ ج) ۵ د) ۷ هـ) ۹

۱۲- در بازی «سیب‌زمینی داغ»، ۵ بازیگر هستند با یک سیب‌زمینی داغ. زیرِ پای هر بازیگر یک شماره است. هر بازیگر مجبور است سیب‌زمینی داغ را در یک ثانیه نگه دارد و سپس آن را به بازیگری که شماره‌اش زیر پای اوست بدهد. در این بازی شما با شماره‌ی ۱ شرکت کرده‌اید و در ابتدا سیب‌زمینی نزد شماست. برای چند تا از حالت‌های زیر ممکن است شماره‌ی زیر پای شما طوری باشد که دیگر سیب‌زمینی به دست شما برنگردد؟

- ۳ زیر پای ۲، ۴ زیر پای۳ ، ۱ زیر پای۴ و ۱زیر پای ۵
- ۳ زیر پای ۲، ۴ زیر پای ۳ ، ۱ زیر پای ۴ و ۴ زیر پای ۵
- ۳ زیر پای۲، ۱ زیر پای۳ ، ۵ زیر پای ۴ ، ۴ زیر پای ۵
- ۱ زیر پای ۲ ، ۲ زیر پای ۳ ، ۲ زیر پای ۴ و ۳ زیر پای ۵

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ هـ) ۴

۱۳- به چند طریق می‌توان خانه‌های یک جدولِ ۳×۱۰ (۱۰ سطر و ۳ ستون) را با دو رنگِ سیاه و سفید رنگ کرد، به‌طوری‌که:

- رنگ خانه‌ها نسبت به ستونِ وسط متقارن باشد.
- از هر دو سطرِ متوالی حداقل یک خانه سیاه شده باشد.
- هیچ دو خانه‌ی سیاه مجاور هم نباشند. دو خانه مجاورند اگر یک ضلع مشترک داشته باشند.

الف) ۱,۰۲۴ ب) ۲,۰۴۸ ج) ۳,۰۷۳ د) ۱,۵۳۶ هـ) ۷۶۸

۱۴- عدد ۸۴ رقمی دودویی $x = x_{83}x_{82}\ldots x_1x_0$ مفروض است. از x، عدد ۴۲ رقمی مبنای ۴ خاص $y = y_{41}y_{40}\ldots y_1y_0$ را به شرح زیر می‌سازیم.

$$\begin{cases} y_0 = x_0 - 2x_1 \\ y_i = x_{2i-1} + x_{2i} - 2x_{2i} + 1 \\ y_{41} = x_{81} + x_{82} \end{cases}$$

به‌طوری‌که هر y_i می‌تواند یکی از رقم‌های مجموعه‌ی $\{2,1,0,1,2\}$ را اختیار کند. چه رابطه‌ای بین $x = \sum_{i=0}^{82} x_i 2^i$ و $y = \sum_{i=0}^{41} y_i 4^i$ برقرار است؟

الف) $y = 2x$ ب) $x = 2y$ ج) $x=y$ د) $y = 4x$ هـ) $y=x$

۱۵- دنباله‌ی $A = \langle a_1, \ldots\ldots, a_n \rangle$ جایگشتی از اعداد ۱ تا n است به‌طوری‌که برای $1 \le i \le n-1$ یا $a_i = a_{i+1} + 5$ یا $a_i = a_{i+1}$ بزرگ‌ترین مقدار n چند است؟

الف) ۱۰ ب) ۱۱ ج) ۱۲ د) ۱۳ هـ) ۱۴

۱۶- جای‌گشت n عضوی $\langle a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n \rangle$ از اعداد ۱ تا n را در نظر بگیرید. برنامه‌ی زیر این دنباله را مرتب می‌کند:

دستورهای زیر را برای هر یک از مقادیر i از ۱ تا n تکرار کن: تا وقتی‌که a_i برابر i نیست ، مقدار خانه‌ی i را با مقدار خانه‌ی a_i تعویض کن.

مثلاً اگر ورودی (۵,۲,۳,۱,۴) باشد،

(۱,۲,۳,۴,۵) $\xrightarrow{\text{تعویض ۲و۳}}$ (۱,۳,۲,۴,۵) $\xrightarrow{\text{تعویض ۱و۴}}$ (۴,۳,۲,۱,۵) $\xrightarrow{\text{تعویض ۵ و ۴}}$ (۵,۳,۲,۱,۴)

حداکثر تعداد تعویض‌ها برای تمام جای‌گشت‌های ۲۰۰۵ عضوی را در نظر بگیرید. باقی‌مانده‌ی این عدد بر ۵ چند است؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ هـ) ۴

۱۷- ۸ خانواده به یک مهمانی دعوت‌شده‌اند. تعداد اعضای خانواده‌ها به ترتیب برابر ۴، ۴، ۴، ۴، ۵، ۵، ۵ و۵ نفرند. میزبان برای شام تعدادی میز در نظر گرفته است که هرکدام دقیقاً ۷ جای صندلی دارد. میزبان می‌خواهد جای نشستن هر فرد را از قبل تعیین کند به‌طوری‌که هیچ دو نفر از اعضای یک خانواده دور یک میز ننشینند. حداقل تعداد میزهای مورد نیاز چند تاست؟

الف) ۴ ب) ۵ ج) ۶ د) ۷ هـ) ۸

۱۸- عدد N داده شده است. N را می‌توانیم هر بار در یک عدد صحیح دل‌خواه ضرب کنیم و سپس کلیه‌ی صفرهای عدد حاصل را از بین ببریم هدف این است که با تکرار این کار در نهایت عدد حاصل تک رقمی شود. مثلاً ۲۱ را می‌توان با دو بار به ۶ تبدیل کرد:

$$\underbrace{۲۱ \xrightarrow{\times ۵} ۱۰۵ \rightarrow ۱۵}_{۱} \underbrace{\xrightarrow{\times ۴} ۶۰ \rightarrow ۶}_{۲}$$

۱۱ را با حداقل چند بار تکرار این عمل می‌توان به یک عدد یک رقمی تبدیل کرد؟

الف) ۲ ب) ۳ ج) ۴ د) ۵ هـ) ۶

۱۹- یک لامپ سالم در زیرزمین فقط به یکی از ۱۰ کلید مشابه در هالِ طبقه‌ی بالا وصل است. ۹ کلید دیگر به هیچ لامپی وصل نیستند. کلید متصل به لامپ ، اگر در وضعیت رو به بالا قرار گیرد لامپ را روشن و اگر رو به پایین باشد آن را خاموش می‌کند. می‌خواهیم با حداقل تعداد پایین رفتن به زیرزمین ، مشخص کنیم کدام‌یک از کلیدها به لامپ زیرزمین وصل است. می‌دانیم که لامپ با ۵ بار خاموش و روشن کردن متوالی حتماً می‌سوزد، و لامپ سوخته از سالم قابل تشخیص است.توجه کنید که فقط همان یک لامپ را در اختیار داریم و سوختن آن هم برای ما مهم نیست. با حداقل چند بار پایین رفتن می‌توان جواب مسئله را پیدا کرد؟ (توجه کنید که بالا رفتن‌ها را نمی‌شماریم.)

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ هـ) ۵

۲۰- یک مکعب ۳×۳×۳ را به چند طریق می‌توان با مکعب مستطیل ۱×۱×۳ به‌طور کامل پر کرد؟

الف) ۱ ب) ۸ ج) ۲۴ د) ۲۷ هـ) ۲۱

۲۱- یک عدد صد رقمی ده‌دهی با ارقام ۱ تا ۹ مفروض است. آن را از چپ به راست به ترتیب زیر می‌خوانیم و عدد جدیدی می‌سازیم : اولین رقم سمت چپ را می‌خوانیم و به همان تعداد جلو می‌رویم، رقمی که به آن می‌رسیم را در عدد جدید قرار می‌دهیم و در عدد فعلی یک رقم جلو می‌رویم . این کار را تکرار می‌کنیم تا به انتهای عدد فعلی برسیم. سپس همین کار را با عدد جدید انجام می‌دهیم و عدد جدیدتری می‌سازیم تا وقتی نتوان عدد جدیدتری ساخت. مثال:

(عدد اصلی) ۱۲۳۴۵۶۷۸۹۲۴۵۶۷ .... $\xrightarrow{\text{عدد ساخته شده‌ی اول}}$ ۲۶۷ .... $\xrightarrow{\text{عدد ساخته شده‌ی دوم}}$ ۷ ....

اگر عدد اولیه صد رقمی به گونه‌ای باشد که آخرین عدد ساخته شده ۹ رقمی شود، تعداد عددهای ساخته شده حداقل و حداکثر چند تاست؟

الف) حداقل ۱ و حداکثر ۴ ب) حداقل ۳ و حداکثر ۳ ج) حداقل ۲ و حداکثر ۲

د) حداقل ۱ و حداکثر ۲ هـ) حداقل ۲ و حداکثر ۳

۲۲- عدد N را «متوازن» می‌گوییم اگر مجموع تعداد ارقام ۱ در همه‌ی اعداد ۱ تا N برابر N باشد. مثلاً ۱ متوازن است. ۱۱ متوازن نیست چون مجموع تعداد ارقام ۱ آن (فقط در عددهای ۱،۱۰و ۱۱) برابر ۴ است. می‌دانیم که اولین عدد متوازن بزرگ‌تر از ۱ عدد ۱۹۹.۹۸۱ است. تعداد عددهای متوازن بین (و شامل) ۱۹۹.۹۸۱ تا ۲۰۰.۰۰۰ چند تاست؟

الف) ۱ ب) ۱۱ ج) ۱۲ د) ۱۹ هـ) ۲۰

۲۳- یک مربع ۱۰۰×۱۰۰ را به‌صورت شطرنجی رنگ کرده‌ایم. شخصی در گوشه بالا و سمت چپ این مربع که خانه‌ای سفید است ایستاده است. این شخص می‌خواهد با حرکت در این مربع در هرکدام از خانه‌ها حداقل یک‌بار ایستاده باشد. هزینه‌ی رفت‌وآمد برای حرکت او به این
صورت است:

- از هر خانه به هرکدام از خانه‌های مجاور(حداکثر ۴ خانه)، ۱ تومان
- از هر خانه‌ی سیاه به هر خانه‌ی سیاه دیگر، رایگان است.

حرکت به غیر از دو صورت گفته شده در بالا ممکن نیست. حداقل هزینه‌ای که این شخص باید بپردازد چه قدر است؟

الف) ۹,۹۹۹ ب) ۵,۰۰۰ ج) ۴,۹۹۹ د) ۵,۰۰۱ هـ) ۹,۹۹۸

۲۴- اعداد ۰ تا ۱۲۷ را به ترتیب پشت سر هم نوشته‌ایم. حالا بین هر دو عدد XOR (یا $\oplus$) آن دو را می‌نویسیم. سپس اعداد اولیه را پاک می‌کنیم. این کار را آن قدر تکرار می‌کنیم تا تن‌ها یک عدد باقی بماند. آن عدد چند است؟

$C = A \oplus B$ را به این صورت تعریف می‌کنیم : اگر a_i, b_i, c_i به ترتیب رقم‌های i ام (از سمت راست) B,A و C در مبنای دو باشند، در این صورت $c_i = \begin{cases} 0 & a_i = b_i \\ 1 & a_i \neq b_i \end{cases}$ مثلاً $5 \oplus 7 = (101)_2 \oplus (111)_2 = 2$.

الف) ۰ ب) ۱۲۷ ج) ۱ د) ۶۴ هـ) ۶۳

۲۵- چند عدد ۱۳ رقمی از ارقام $\{1,2,3,4\}$ وجود دارد که مجموع هر سه رقم متوالی در آن زوج باشد؟

الف) 2^{13} ب) 2^{15} ج) 2^{11} د) $2^{11} \times 3$ هـ) 4×3^{11}

۲۶- ۳۲ لامپ موجود است و هر کدام به یک کلید متصل است. در ابتدا بعضی از لامپ‌ها روشن و بعضی خاموش‌اند. ناگهان یک سیم متصل به یکی از لامپ‌ها اتصال کوتاه می‌کند خراب شده و باعث سوختن فیوز و در نتیجه قطع کل برق می‌شود. فیوز سوخته قابل استفاده‌ی مجدد نیست و باید تعویض شود. اگر کلیدِ لامپی که اتصالی دارد در وضعیت روشن قرار داشته باشد . فیوز سالمی را جایگزین کنیم فیوز جدید نیز خواهد سوخت. برای پیدا کردن کلید متصل به اتصال کوتاه چند عدد فیوز سالمِ جدید لازم است؟

الف) ۵ ب) ۱ ج) ۶ د) ۴ هـ) ۳۱

۲۷- یک چراغ چشمک‌زن با سرعتِ(a , b) چراغی است که به‌طور متناوب، a ثانیه متوالی خاموش است و سپس برای b ثانیه‌ی متوالی روشن می‌ماند، و مدام این چرخه را تکرار می‌کند. (a و b اعداد طبیعی هستند.) در مورد یک چراغ چشمک‌زن می‌دانیم:

۱) در ثانیه‌ی دهم خاموش بوده است.
۲) در ثانیه‌ی دوازدهم روشن بوده است.
۳) در ثانیه‌ی چهاردهم خاموش بوده است.
۴) در ثانیه‌ی شانزدهم روشن بوده است.

با این فرض که نمی‌دانیم چراغ از چه ثانیه‌ای شروع به کار کرده است، چند حالت ممکنِ(aوb) برای سرعتِ این چراغ وجود دارد؟

الف) ۴ ب) ۵ ج) ۶ د) ۷ هـ) ۸

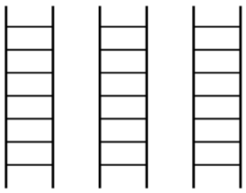
۲۸- دنباله‌ی $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ را در نظر بگیرید که $a_i \in \{+1, -1, +5, -5\}$, S_j را مجموع j عنصر اول دنباله تعریف می‌کنیم. می‌دانیم که هیچ $1 \quad j \quad n$ وجود ندارد که S_j مضرب ۵ باشد. در هر گزینه یک زوج مرتب (n, S_j) داده شده است. کدام گزینه‌ی زیر امکان‌پذیر است؟

الف) (۶۷,۳۳۳) ب) (۸۳,۳۳۴) ج) (۷۷,۲۵۶) د) (۹۳,۲۸۸) هـ) (۱۰۵,۵۱۹)

۲۹- یک جدول ۲۰۰۵×۲۰۰۵ در اختیار داریم که تمام خانه‌های آن سفید هستند. شخصی ۱۳۸۳ بار، یک سطر و یک ستون را انتخاب و رنگ همه‌ی خانه‌های آن سطر و آن ستون را بر عکس می‌کند. توجه کنید که رنگ خانه‌ی مشترک در سطر و ستون تغییر نمی‌کند. تعداد خانه‌های سیاه باقی‌مانده در جدول در انتها، کدام یک از گزینه‌های زیر می‌تواند باشد؟

الف) ۰ ب) ۲,۷۷۲,۹۱۵ ج) ۱۹۶,۰۷۸ د) ۳,۰۴۴,۸۵۴ هـ) ۲,۱۲۴

۳۰- آقای ملکی می‌خواهد از سه نردبان ۷ پله‌ای هواپیما که مانند شکل مقابل در کنار هم قرار دارند بالا برود و در بالاترین سطح قرار بگیرد. او در هر حرکت می‌تواند به یک پله بالاتر در یکــی از نردبان‌های مجاور یا نردبانی که اکنون بر روی آن قـرار دارد برود، ولی نمی‌تواند در یک حرکت از نردبان اول به نردبان سوم یا برعکس برود. اگر او در ابتدا بر روی اولین پله نردبان سمت راست باشد، به چند طریق می‌تواند خود را به یکی از پله‌های هفتم برساند؟

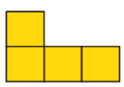


الف) ۷۰ ب) ۱۲۸ ج) ۱۶۹ د) ۱۸۲ هـ) ۲۳۹

۳۱- در ۳۰ کیسه ۳۲ کارت با شماره‌های ۱ تا ۳۲ ریخته‌ایم، به‌طوری‌که هیچ کیسه‌ای خالی نیست و نیز اگر کارت i در کیسه‌ی k باشد، کارت $i+1$ در کیسه‌ای با شمــاره‌ی کوچک‌تر از k نیســت. در ابتدا در کیسه‌ها بستــه اســت و وقتــی درِ یکی را باز می‌کنیم شماره‌ی کارت‌های آن را می‌بینیم. دستِ کم درِ چند کیسه را باید باز کنیم تا حتماً بتوانیم کارت ۱۳ را ببینیم؟

الف) ۲ ب) ۵ ج) ۶ د) ۱۳ هـ) ۳۲

۳۲- حداقل چند مستطیل ۳×۲ را باید در صفحه قرار دهیم به‌طوری‌که هم پوشانی نداشته باشند و بتوان آن‌ها را با موزائیک‌های به شکل مقابل کاملاً پوشاند؟ بدیهی است که دوران و تقارن مجاز است.



الف) ۲ ب) ۳ ج) ۴ د) ۶ هـ) هرگز نمی‌شود

۳۳- دنباله‌ی ۵ عضوی (۳،۱،۴،۵،۲) را در نظر بگیرید که عضو اول آن ۳ است. هر عمل «وارون» یعنی انتخاب یک i و وارون کردن عضوهای اول تا i ام. مثلاً «۵،۴،۱،۳،۲» دنباله را پس از یک وارون نشان می‌دهد. با چند تا عمل وارون می‌تـوان دنباله‌ی ورودی را از چپ به راست به صورت صعودی مرتب کرد؟ کم‌ترین گزینه‌ی ممکن را انتخاب کنید.

الف) ۴ ب) ۵ ج) ۶ د) ۷ هـ) ۸

۳۴- یک مکعب بزرگ $n\times n\times n$ را در نظر بگیرید. این مکعب را به n^3 مکعب واحد تقسیم کرده‌ایم. دو نفر این بازی را روی مکعب بزرگ انجـام می‌دهـند: هر نفـر در نوبت خـود یک مکعـب مسـتـطیل $n\times1\times1$ ، $1\times n\times1$ و یا $1\times1\times n$ از مکعب بزرگ، کـه هیچ‌یک از مکعب‌های واحد آن رنگ نشده‌اند، را انتخاب کرده و مکعب‌های واحد آن را رنگ می‌کند. در ابتدا هیچ‌یک از مکعب‌های واحد رنگ نشده‌اند. هر کس نتواند در نوبت خود مکعب مستطیلی به شرح فوق انتخاب و رنگ کند بازنده خواهد بود. برای کدام‌یک از حالت‌های $n=10$، $n=11$، $n=12$ و $n=13$، نفر اول می‌تواند طوری بازی کند که حتماً برنده شود؟

الف) همه‌ی حالات ب) هیچ‌یک از حالات ج) حالاتِ $n=11$ و $n=13$

د) حالت $n=11$ هـ) حالاتِ $n=10$ و $n=12$

۳۵- n نفر دور میزی دایره‌ای شکل نشسته‌اند. هر نفر یا راست‌گوست یا دروغ‌گو (راست‌گو همیشه راست و دروغ‌گو همیشه دروغ می‌گوید.) هرکدام از این n نفر این جمله را می‌گوید: «بین مـن و دو نفـرِ سمتِ راست و دو نفـرِ سمتِ چپ من، دقیقاً k نفر دروغ‌گو هستند.» کدام یک از گزاره‌های زیر در مورد r ، تعدادِ حالاتِ دروغ‌گو و راست‌گو بودنِ این افراد، درست است؟

الف) اگر $n=51$ و $k=4$ ، آنگاه $r=4$.

ب) اگر $n=50$ و $k=0$ ، آنگاه $r=0$.

ج) اگر $n=51$ و $k=5$ ، آنگاه $r=1$.

د) اگر $n=50$ و $k=1$ ، آنگاه $r=6$.

هـ) اگر $n=52$ و $k=1$ ، آنگاه $r=6$.

۳۶- دنباله‌ای از اعداد ۱،۱ به طول ۸۴ به شکل زیر مفروض است که هر عدد را به ترتیب از راست به چپ x_0 تا x_{83} نام‌گذاری می‌کنیم. دقت کنید که دنباله بعد از ";" تکرار می‌شود.

$$1,1,-1,-1,1,-1;1,1,-1,-1,1,-1;...;1,1,-1,-1,1,-1$$

معادل دودویی عدد $\sum_{i=0}^{83} x_i 2^i$ چند رقم صفر دارد؟

الف) ۸۳ ب) ۸۲ ج) ۴۲ د) ۴۱ هـ) ۴۰

۳۷- تعدادی کارت داریم که روی هریک ، یک عدد نوشته شده است. دستگاه کارت برگردان دستگاهی است که اگر دو کارت با عددهای a,b به آن بدهیم، آن‌ها را نابود کرده و یک کارت با عدد $2a+2b$ تولید می‌کند.(یعنی دو کارت را به یک کارت تبدیل می‌کند.) ۷ تا کارت با شماره‌ی ۱ داریم. می‌خواهیم با چند بار استفاده از دستگاه کارت برگردان بیش‌ترین عدد ممکن را تولید کنیم. این عدد چند است؟

الف) ۲۵۶ ب) ۱۹۰ ج) ۹۴ د) ۸۲ هـ) ۵۲

۳۸- در پارکینگ مشتی ممدعلی سیستم عجیبی برای پارک کردن ماشین‌ها برقرار است. این پارکینگ هفت جای پارک دارد که به ترتیب با شماره‌های صفر تا شش مشخص شده‌اند. هر ماشینی که به پارکینگ وارد می‌شود ابتدا سراغ جای پارکی می‌رود که شماره‌ی آن برابر باقی مانده‌ی تقسیم شماره‌ی پلاک ماشین بر عدد هفت است. اگر این جای پارک پر بود به سراغ بعدی می‌رود (اگر جای پارک شماره شش پر بود به سراغ شماره صفر می‌رود) و همین‌طور ادامه می‌دهد تا به اولین جای پارک خالی برسد و آنجا پارک می‌کند و سپس ماشین بعدی وارد پارکینگ می‌شود. اگر در انتها ماشین‌ها در پارکینگ به ترتیب ۴۶، ۶۸، ۳۹، ۹۳، ۲۳، ۷۰، ۹۸ ایستاده باشند (پلاک شماره‌ی ۹۸ در جای پارک شماره‌ی صفر و پلاک ۴۶ در پارکینگ شماره‌ی ۶)، جند ترتیب ممکنِ اولیه برای ورود آن‌ها ممکن است؟

الف) ۵۰۴۰ ب) ۲۱۰ ج) ۳۰۵ د) ۴۲۰ هـ) ۷۲۰

۳۹- آرش برای فرستادن تقاضای استخدام برای هر یک از ده شرکت مختلف مورد نظرش باید سه توصیه‌نامه از سه استاد مختلف خود (مجموعاً ۳۰ عدد) داشته باشد. چهار نفر از اساتید او به‌نام‌های دکتر قدسی، دکتر توسرکانی، دکتر جابری پور و دکتر اکبری برای او توصیه‌نامه خواهند نوشت. دکتر قدسی ۹عدد، دکتر تو سرکانی ۸ عدد، دکتر جابری پور ۷ عدد و دکتر اکبری ۶ عدد. آرش چند راه مختلف برای فرستادن این توصیه‌نامه‌ها دارد؟

الف) ۱۲,۶۰۰ ب) $\binom{10}{4}$ ج) 4^{10} د) 3^{10} هـ) ۳,۰۲۴

۴۰- یک مکعب ۱×۱×۱ را به ۶۳۰ مکعب با ابعاد $\frac{1}{7}\times\frac{1}{9}\times\frac{1}{10}$ تقسیم می‌کنیم. اگر خطی که قطر اصلی این مکعب است را رسم کنیم، از داخل جند مکعب می‌گذرد؟

الف) ۸۵ ب) ۸۴ ج) ۲۵ د) ۲۴ هـ) ۱۰

«پاسخنامه تشریحی»

۱- مجموع کل کارها به‌غیراز کار ۲۰۰ دقیقه‌ای برابر ۹۸۰۰ هست که اگر آن را به ۱۰ یعنی تعداد نفرات تقسیم کنیم ۹۸۰ به دست می‌آید به این معنا که حداقل یکی از افراد قبل از رسیدن به لحظه ۹۸۰ و یا در همان لحظه کارش تمام می‌شود و در آن لحظه به‌غیراز کار ۲۰۰ دقیقه‌ای هیچ کار دیگری باقی نمانده است که اگر کار ۲۰۰ دقیقه‌ای را به او بسپاریم قبل از لحظه ۱۱۸۰ کل کار به اتمام خواهد رسید. اگر زمان هر یک از ۹۹ کار دیگر را چنان تنظیم کنید که به هر یک از ۱۰ نفر دقیقاً ۹۸۰ دقیقه کار برسد آنگاه با اختصاص کار ۲۰۰ دقیقه‌ای به یکی از آن ۱۰ نفر، دقیقاً در لحظه ۱۱۸۰ کل پروژه به اتمام خواهد رسید.

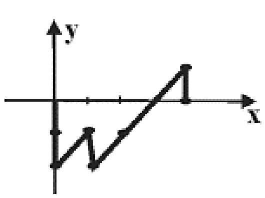
۲- اگر شیشه سمت چپ را A و شیشه سمت راست را B بنامیم و عبور نور از شیشه X را با X و برگشت نور از آن شیشه را با x نمایش دهیم، آنگاه نورهای رد شده به سمت راست به یکی از شکل‌های زیر خواهد بود:

I) AB
II) AbaB
III) AbabaB
⋮
Aba...baB
⋮

در هر یک از حالات فوق به ترتیب ۴۹ واحد، $49\times\frac{4}{100}$ واحد، $49\times(\frac{4}{100})^2$ واحد و ... نور به سمت راست منتقل می‌شود که مجموع کل آن‌ها برابر $49\times\frac{1}{1-\frac{4}{100}}$ یا $49+\frac{4\times 49}{96}$ می‌شود.

۳- مقدار d نمی‌تواند ۲ باشد. اگر d برابر ۱ باشد، آنگاه هریک از مقادیر سایر متغیرها باید صفر باشند. اگر d برابر ۰ باشد آنگاه مقادیر b،c و a به ترتیب به‌صورت ۲،۰،۰ یا ۱،۲،۰ و یا ۲،۱،۱ می‌تواند باشد.

۴- حرکت از نوع دوم مهره را به سمت راست منتقل نمی‌کند. بنابراین باید دقیقاً ۴ بار از حرکت نوع اول استفاده کرد. چون حرکت نوع اول یک واحد مهره را به سمت بالا منتقل می‌کند باید برای خنثی کردن آن جهت یک‌بار نیز از حرکت دوم استفاده شود، درنتیجه در مجموع ۸ حرکت استفاده خواهد شد که چهارتا از آن‌ها از نوع اول و چهار تا از آن‌ها از نوع دوم می‌باشد. تعداد جای‌گشت‌های ۸ شیء که چهار تا از آن‌ها، شبیه هم و چهار تای دیگر نیز شبیه هم هستند برابر $\frac{8!}{4!4!}$ یا ۷۰ است به‌عنوان‌مثال مسیر متناظر به جای‌گشت ۲،۲،۱،۲،۱،۱،۱،۲ مطابق شکل مقابل است.



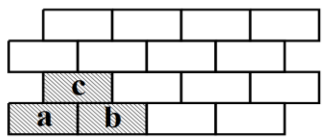
۵- اگر سه گونی به اوزان a، b و c چنان باشند که $a \le b \le c$، آنگاه با توجه به ادغام‌های گوناگون به یکی از هزینه‌های $۲a + ۲b + c$,$a + ۲b + ۲c$ و یا $۲a + ۲b + c$ خواهیـــم رسیـد که بیـن آن هزینه‌ها $۲a + ۲b + c$ کمتریـن مقـدار ممکن را دارد.

بنابرایـــن بهتر آن است که در ابتدا گونی‌های سبک‌تر را با هم ادغام کرده و حاصل را با بعدی و به همین ترتیب تا آخر پیش رویم:

۲+۳=۵ (هزینه = ۵)
۴+۴=۸ (هزینه = ۸)
۵+۶=۱۱ (هزینه = ۱۱)
۸+۱۱=۱۹ (هزینه = ۱۹)

مجموع هزینه‌ها =۴۳

۶- اگر سه آجر مشخص شده در شکل را با a، b و c رنگ‌آمیزی کنیم، مابقی آجرها به‌صورت منحصربه‌فرد رنگ‌آمیزی خواهند شد. پس کافی است رنگ سه آجر مشخص‌شده را تعیین کنیم تا رنگ مابقی آجرها نیز معلوم شـود. اختصاص ۳ رنگ متمایز به ۳ آجر مشخص شـده بـه !۳ یعنی ۶ ممکن است.



۷- شکل‌های دوم، چهارم و ششم از سمت راست قابل دیده شدن هستند ولی سایر شکل‌ها را نمی‌توان تولید کرد. در واقع دو گوشه نشان داده‌شده در شکل دو گوشه مقابل مکعب می‌باشند، بنابراین می‌توانید مکعب یاد شده را به‌صورت منحصـر به فرد ساختـه و از گوشـه‌هـای مختلف به آن نگاه کنید.

۸- ابتدا اعداد از ۱ تا ۱۳۸۴ را به ۱۱ بازه مطابق تقسیم‌بندی زیر افراز می‌کنیم:

[۱,۲)، [illegible] ۴۴ ۴۴ ۸۷ ۸۷ ۱۷۴ ۱۷۴ ۳۴۷ ۳۴۷ ۶۹۳ [۶۹۳,۱۳۸۴)

ابتدا آرمین عدد ۲۲ را پیشنهاد می‌دهد که اگر رمز در بازه مربوط به آن باشد برنده می‌شود و اگر رمز در آن بازه نبوده و بزرگ‌تر از ۲۲ و یا کوچک‌تر از آن باشد توسط آرش اعلام می‌شود. در سمت راست بازه مربوط به ۲۲ فقط ۵ بازه در سمت چپ آن نیز ۵ بازه وجود دارد به این معنا که اگر عدد موردنظر آرش بزرگ‌تر از ۲۲ و در خارج بازه مربوطه به آن بوده با این که کمتر از ۲۲ باشد برای اطمینان از یافتن جواب مراحل یکسانی لازم است. بنابراین فرض می‌کنیم جواب آرش بزرگ‌تر باشد.
آرمین عدد ۱۷۴ را به‌عنوان دومین عدد پیشنهاد می‌دهد و اگر برنده نشود متناسب با بزرگ‌تر و یا کوچک‌تر گفتن آرش به ترتیب یکی از دو عدد ۳۴۷ و یا ۴۴ را به‌عنوان عدد سوم پیشنهاد خواهد داد که اگر در این مرحله نیز برنده نشود در مورد اول عدد ۶۹۳ و در مورد عدد دوم عدد ۸۷ را پیشنهاد داده و یقیناً برنده خواهد شد.

۹- دنباله مربوط به رقم یکان به شکل زیر است که دارای دوره تناوب ۴ است:

۱،۲،۴،۸،۶،۲،۴،۸،۶،۲،۴،۸،۶.....

بنابراین دنباله اعدادی که به آن‌ها برمی‌خوریم به شکل زیر خواهند بود:

۱،۲،۴،۸،۱۶،۲۲،۲۴،۲۸،۳۶،۴۴،۴۸،۵۶،.....,۱۳۸۲

به‌این‌ترتیب که در هر بازه $[۲۰k,۲۰k+۱۹]$ دقیقاً به ۴ عدد برمی‌خوریم (به غیر از اولین بازه به صورت فوق که به ۵ عدد برمی‌خوریم). از عدد۰ تا ۱۳۷۹ به ۶۹ بازه ۲۰ تایی قابل افراز است. بنابراین درکل این ۶۹ بازه به تعداد ۵×۱+۴×۶۸ یعنی ۲۷۷ عدد قابل برخورد وجود دارد که با احتساب عدد ۱۳۸۲ تعداد کل اعداد قابل برخورد به ۲۷۸ خواهد رسید.

۱۰- برای آنکه نفر دوم در مرحله n ام برنده شود باید در مرحله n-1 نفر اول به یک از باقی‌مانده‌های ۴،۵،۶،۷ و ۸ رسیده باشد، زیرا اگر در آن مرحله، نفر اول به یکی از باقی‌مانده‌های ۰،۱،۲ و یا ۳ رسیده باشد، نفر دوم مکملی برای آن باقی‌مانده (از بین اعداد مجموعه داده شده) نخواهد یافت.

- برای آنکه در مرحله n-1 نفر اول ناچار به یکی از باقی‌مانده‌های ۴،۵،۶،۷ و یا ۸ برسد باید نفر دوم در مرحله n-2 به باقی‌مانده ۳ برسد.
- برای آنکه در مرحله n-2 نفر دوم بتواند به باقی‌مانده ۳ برسد باید نفر اول در مرحله n-3 به یکی از باقی‌مانده‌های ۸،۰،۱،۲ و یا ۷ رسیده باشد که او بتواند ۴،۳،۲،۱ و یا ۵ اضافه کرده و باقی‌مانده عدد حاصل بر ۹ را برابر ۳ کند.
- برای آنکه در مرحله n-3 نفر اول به‌ناچار به یکی از باقی‌مانده‌های ۸،۰،۱،۲ و یا ۷ برسد باید نفر دوم در مرحله n-4 به باقی‌مانده ۶ برسد.
- برای آنکه در مرحله n-4 نفر دوم بتواند به باقی‌مانده ۶ برسد لازم است نفر اول در مرحله n-5 به یکی از باقی‌مانده‌های ۴،۳،۲،۱ و یا ۵ رسیده باشد.
- برای آنکه در مرحله n-5 نفر اول به یکی از باقی‌مانده‌های ۴،۳،۲،۱ و یا ۵ برسد لازم است نفر دوم در مرحله n-6 به باقی‌مانده صفر برسد.

با توجه به توضیحات فوق معلوم می‌شود که شرط لازم و کافی برای آنکه نفر دوم بتواند در مرحله n ام برنده شود، آن است که بتواند در مرحله (n-6)ام برنده شود. و چون عدد صفر مضرب ۹ است؛ یعنی در مرحله صفرام نفر دوم برنده است او می‌تواند در مراحل ۱۸،۱۲،۶ ..... ۱۳۸۶،۱۳۸۰..... برنده شود.

۱۱- مضارب دو رقمی اعداد ۱۷ و ۲۳ به شکل زیر می‌باشند:

۱۷:۱۷,۳۴,۵۱,۶۸,۸۵

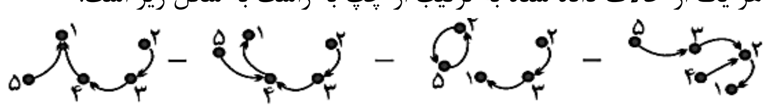
۲۳:۲۳,۴۶,۶۹,۹۲

همان‌طور که مشخص است هیچ عدد دو رقمی که رقم دهگانش ۷ باشد وجود ندارد که مضرب ۱۷ یا ۲۳ باشد، بنابراین اگر در نوشتن عدد رقم ۷ به کار رود به بن‌بست خواهیم رسید. چون رقم ۷ استفاده نمی‌کنیم بنابراین رقم ۱ نیز نباید استفاده کرد زیرا تن‌ها رقمی که می‌تواند بعد از ۱ بیاید تا عدد دو رقمی حاصل مضرب ۱۷ و یا ۲۳ باشد، رقم غیرمجاز ۷ می‌باشد. به همین دلیل مجاز به استفاده از ارقام ۵ و ۸ نیز نیستیم، در نتیجه ۱۳۸۰ رقم اول اعداد خواسته شده به شکل زیر می‌باشد که ارقام آن دوره تناوبی به طول ۵ دارد:

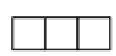
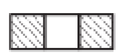
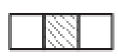
۴۶۹۲۳۴ ....۶۹۲۳۴۶۹۲۳۴۶

اما در نوشتن سه رقم آخر به بن‌بست نیز برسیم اشکالی ندارد، زیرا نوشتن عدد به اتمام می‌رسد. بنابراین سه رقم آخر عدد به یکی از دو شکل ۶۹۲ یا ۶۸۵ است.

۱۲- گراف‌های جهت‌دار متناظر به هر یک از حالات داده شده به ترتیب از چپ به راست به شکل زیر است:



با توجه به گراف‌های فوق معلوم می‌شود که عدد زیر پای ۱ هر چه باشد در حالت اول، دوم و چهارم سیب زمینی به شماره ۱ بر خواهد گشت ولی در حالت سوم این‌چنین نیست. در حالت سوم اگر عدد زیر پای ۱ یکی از دو عدد ۴ و یا ۵ باشد، آنگاه سیب‌زمینی بین آن دو نفر خواهد چرخید و هرگز به خود ۱ برنمی‌گردد.

۱۳- هر سطر به یکی از سه شکل  ،  و یا  می‌تواند باشد به شرطی که اگر سطر i ام به یکی از آن سه شکل بود سطر (i+1)ام نیز نمی‌تواند به همان شکل باشد، بنابراین سطر اول ۳ حالت و مابقی سطرها وابسته به نوع شکل سطر قبل از خود، به یکی از دو شکل دیگر می‌تواند باشد، بنابراین طبق اصل ضرب جواب موردنظر $2^9 \times 3$ یعنی ۱۵۳۶ می‌باشد.

-۱۴

$$y = \sum_{i=0}^{41} y_i \times 4^i = y_0 \times 4^0 + y_1 \times 4^1 + y_2 \times 4^2 + \ldots + y_{40} \times 4^{10} + y_{41} \times 4^{41}$$

$$= (x_0 - 2x_1) \times 4^0 + (x_1 + x_2 - 2x_3) \times 4^1 + (x_3 + x_4 - 2x_5) \times 4^2 + \ldots + (x_{79} + x_{80} - 2x_{81}) \times 4^{40}$$

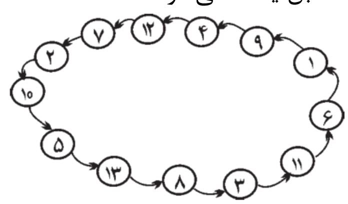
$$+ (x_{81} + x_{82}) \times 4^{41}$$

$$= x_0 \times 2^0 + x_1 \times 2^1 + x_2 \times 2^2 + x_3 \times 2^3 + \ldots + x_{81} \times 2^{81} + x_{82} \times 2^{82} = \sum_{i=0}^{82} x_i \times 2^i = x$$

-۱۵ اعداد قبل و بعد از اعداد از ۱ تا ۸ به‌صورت منحصربه‌فرد به شکل زیر یافت می‌شوند:

۶ → ۱ → ۹
۷ → ۲ → ۱۰
۸ → ۳ → ۱۱
۹ → ۴ → ۱۲
۱۰ → ۵ → ۱۳
۱۱ → ۶ → ۱
۱۲ → ۷ → ۲
۱۳ → ۸ → ۳

معلوم است که در این صورت دوره بسته‌ای به شکل مقابل یافت می‌شود:



حلقه مقابل باید از یک نقطه بریده شود که اگر این عمل بین ۱ و ۶ باشد، آنگاه عدد ۱۴ می‌تواند بعد از ۶ وارد شود که در این صورت به‌جای گشت زیر خواهیم رسید:

۱-۹-۴-۱۲-۷-۲-۱۰-۵-۱۳-۸-۳-۱۱-۶-۱۴

و اگر آن حلقه بین ۱ و ۹ بریده شود باز عدد ۱۴ می‌تواند قبل از عدد ۹ وارد شود که در این صورت نیز به‌جای گشتی خواهیم رسید که به شکل زیر می‌باشد:

۱۴-۹-۴-۱۲-۷-۲-۱۰-۵-۱۳-۸-۳-۱۱-۶-۱

-۱۶ معلوم است که در هر تعویضی یک عدد در جای خود قرار می‌گیرد و با توجه به اینکه در تعویض آخر دو عدد در جای خود قرار می‌گیرند، بنابراین تعداد تعویض‌ها حداکثر ۲۰۰۴ خواهد شد. برای جای‌گشت زیر تعداد تعویض‌ها برابر ۲۰۰۴ خواهد شد.

۲۰۰۵,۱,۲,۳,۴,...,۲۰۰۳,۲۰۰۴

-۱۷ تعداد کل افراد آن خانواده برابر ۴×۴+۵×۴ یعنی ۳۶ می‌شود. معلوم است که جا دادن ۳۶ نفر در دور میزهای ۷ نفره به‌طوری که تعداد آن‌ها ۵ یا کمتر باشد، امکان‌ناپذیر است (۵ میز ۷ نفره حداکثر ۳۵ نفر در خود جای می‌دهند). جا دادن افراد در دور ۶ میز با شرط اشاره شده امکان پذیر است، کافی است خانواده‌ها به ترتیب با g,f,e,d,c,b,a و h نام‌گذاری کرده و دور هر میز دقیقا ۶ نفر قرار دهید؛ یعنی دور هر میز دقیقاً از دو تا از خانواده‌ها موجود نباشد که حالت بندی آن به شکل زیر می‌شود:

(a-b) (a-c) (b-c) (d-e) (d-f) (g-h)

۱۸- مراحل انجام کار به شکل زیر می‌باشد:

$$۱۱\times ۴۶ = ۵۰۶ \rightarrow ۵۶$$
$$۵۶\times ۱۲۵ = ۷۰۰۰ \rightarrow ۷$$

۱۹- در ابتدا کلید ها را به دو دسته پنج تایی تقسیم می‌کنیم و پنج تای اول را رو به بالا (در حالت U) و پنج تای دوم را رو به پایین (در حالت D) قرار می‌دهیم، سپس به زیر زمین رفته و لامپ را نگاه می‌کنیم اگر روشن باشد می‌فهمیم که کلید در دسته اول قرار دارد، در غیـر این صورت کلید در دسته دوم قرار خواهد داشت. بعد از شناسایی دسته مورد نظر، ۳ تا از کلیدها را در وضعیت U و دو تای دیگر را در وضعیت D قرار می‌دهیم و برای بار دوم به زیر زمین می‌رویم که اگر لامپ روشن باشد، کلید مورد نظر در دسته ۳ تایی و در غیر این صورت در دسته دوتایی خواهد بود. پس از شناسایی دسته مورد نظر (در بدترین حالت سه تایی)، دو تا از آنها را در وضعیت U و یکی دیگر را در وضعیت D قرار داده و برای بار سوم به زیر زمین می‌رویم که اگر لامپ روشن بود کلید مطلوب در دسته دوتایی بوده و در غیر این صورت آن کلید، کلید سوم است. بدترین حالت این است که لامپ روشن بوده و دو کلید مجهول باقی مانده باشد که در این صورت یکی از آن دو کلید را در وضعیت U و دیگری را در وضعیت D قرار داده و برای بار چهارم (آخرین بار) به زیر زمین رفته و با توجه به روشن و یا خاموش بودن لامپ، کلید مورد نظر را شناسایی می‌کنیم.

۲۰- حالات بندی زیر در نظر می‌گیریم:

I) تعداد مکعب های عمودی «۰» باشد. در این حالت هر طبقه از سه طبقه مورد نظـر به دو طریــق متمایز (به صورت طولی و یا عرضی) می توانند پر شوند که طبق اصل ضرب، ۸ طریق متمایز به دست می‌آید.

II) تعداد مکعب های عمودی «۳» باشد. (ابتدا یاد آوری می‌شود که اگر یکی از مکعب ها عمودی باشد باید همه ی مکعب های در عرض آن و یا همه مکعب های در طول آن نیز به صورت عمودی چیده شوند.) در این حالت بستگی به این که کدام ردیف ۳تایی از ردیف های عرضی و یا کدام ردیف ۳تایی از ردیف های طولی به صورت عمودی چیده شوند به ۶ طریق متمایز خواهیم رسید که بقیه مکعب ها به صورت منحصر به فرد قابل چیدن خواهند بود.

III) تعداد مکعب های عمودی «۶» باشد. در این حالت بستگی به این که کدام دو ردیف از ۳ ردیف عرضی و یا کدام دو ردیف از ۳ ردیف طولی به صورت عمودی چیده شوند به ۶ طریق متمایز خواهیم رسید که در این حالت نیز بقیه مکعب ها به صورت منحصر به فرد چیده می‌شوند.

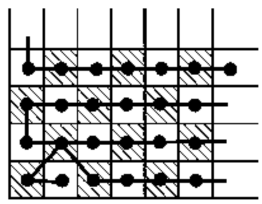
IV) تعداد مکعب های عمودی «۹» باشد. معلوم است که در این حالت چیدن مکعب ها فقط به یک طریق ممکن است. با توجه به حالت بندی فوق معلوم می‌شود که تعداد کل طرق چیدن به ۱+۶+۶+۸ یعنی ۲۱ طریق متفاوت ممکن شود.

۲۱- اولاً مشخص است که از هر ده رقم متوالی حداقل یک رقم در عدد جدید نوشته می‌شود، بنابراین عددی که از یک عدد صد رقمی ساخته می‌شود حداقل ده رقمی می‌شود و نمی‌تواند نه رقمی شود بنابراین تعداد اعداد ساخته شده حداقل برابر ۲ است. اگر عدد صد رقمی اولیـه از ۹ دسته ۵۱۱۱۱۱، از ۸ دسته ۴۱۱۱۱ و ۱ دسته ۵۱۱۱۱۹ (که دسته دوم از چپ می‌باشد) آنگاه عدد دوم به صورت ۱۹۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱ و عدد سوم به صورت ۹۱۱۱۱۱۱۱۱ در می‌آید.

ثانیاً با کمی توجه مشخص است که اولین عدد ساخته شده حداکثر ۵۰ رقمی، دومین عدد ساخته شده حداکثر ۲۵ رقمی، سومین عدد ساخته شده حداکثر ۱۲ رقمی و بالاخره چهارمین عدد ساخته شده حداکثر ۶ رقمی می‌توانند باشند. بنابراین با توجه به این که عدد نهایی ۹ رقمی است معلوم می‌شود که اعداد ساخته شده نمی‌تواند ۴ تا باشد. اگر عدد اولیه چنان باشد که از ۱۳ بسته ۱۲۱۱۱۱ و یک بسته ۱۲۱۱۱۹ (بسته دوم) و یک بسته ۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱ (بسته آخر) تشکیل شود، آنگاه تعداد اعداد ساخته شده برابر ۳ خواهد شد.

۲۲- چون عدد ۱۹۹۹۸۱ متوازن است بنابراین اعداد ۱۹۹۹۸۲،۱۹۹۹۸۳،....,۱۹۹۹۹۰ نیز همگی متوازن هستند زیرا در هر یک از آن اعداد فقط یک رقم ۱ وجود دارد و از عددی به عدد دیگر فقط یک واحد به مجموع ارقام مورد اشاره اضافه می‌شود. عدد۱۹۹۹۹۱ متـوازن نیست چون ۲ واحد به مجموع مورد نظر اضافه می‌شود، به این معنا که به ازای هر یک از اعداد ۱۹۹۹۹۱ تا ۱۹۹۹۹۹ مجموع مورد اشاره ۱ واحد از خود عدد بیشتر خواهد بود و در نتیجه در مورد عدد ۲۰۰۰۰۰ که رقم «۱» ندارد، آن مجموع با خود عدد ۲۰۰۰۰۰ یکسان خواهد بود به این معنا که عدد ۲۰۰۰۰۰ نیز متوازن است.

۲۳- اولاً باید توجه داشت که برای ورود و خروج هر مربع سفیدی مجموعا ۲ تومان هزینه می‌شود و ثانیاً به غیر از خانه‌های اول و آخر، ورود و خروج لازم دارند. واضع است که خانه اول ورود ندارد و نیز می‌توان حرکات آخر را چنان چید (مطابق شکل)
که آخریـن خانه سفید باشد و خروجی لازم نداشته باشد که در این صورت هزینه انجام شده برابر ۲-۲×۵۰۰۰ یعنی ۹۹۹۸ خواهد شد.



۲۴- $F(i)$ را برابر با برایند XOR تمام اعداد قبل از i و خود i تعریف می‌کنیم. معلوم است که $F(۱) = ۱, F(۲) = ۳, F(۳) = ۰, F(۴) = ۴, ...$

تساوی های زیر به شیوه استقرای ریاضی به راحتی قابل اثبات هستند:

$$F(۴k-۱) = ۰$$
$$F(۴k) = ۴k$$
$$F(۴k+۱) = ۱$$
$$F(۴k+۲) = ۴k+۳$$

به عنوان مثال برای اثبات درستی $F(۴k-۱) = ۰$ به شیوه زیر عمل می‌کنیم:

$$F(۴k-۱) = (۴k-۱)_{\oplus} F(۴k-۲) = (۴k-۱)_{\oplus}(۴k-۱) = ۰$$

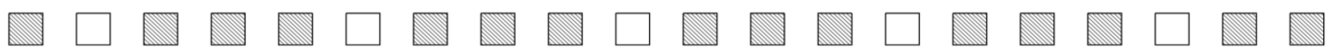
چون ۱۲۷ به شکل ۴k-۱ می‌باشد، بنابراین $F(۱۲۷) = ۰$.

۲۵- هر یک از ارقام یکان و دهگان از آن اعداد، مستقل از یکدیگر ۴ حالت می‌توانند داشته باشند، رقم صدگان با توجه به وضعیت ارقام یکان و دهگان، زوج و یا فرد بودنش مشخص می‌شود؛ یعنی ۲ حالت می‌تواند داشته باشد «۲ یا ۴» و یا «۱یا ۳». رقـم هزارگـان نیز با توجـه بـه وضعیت ارقام دهگان و صدگان، وضعیت مشابه خواهد داشت و .... بنابراین طبق اصل ضرب جواب مورد نظر $۲^{۱۱} \times ۴^{۲}$ یعنی $۲^{۱۵}$ می‌شود.

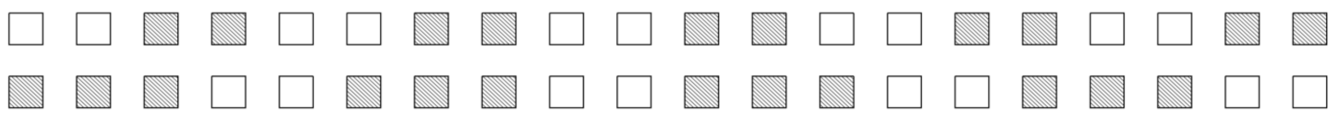
۲۶- ابتدا یک عدد فیوز می‌بندیم که اگر نسوزد معلوم می‌شود کلید مورد نظر متصل به یکی از لامپ های خاموش می‌باشد. با عوض کردن وضعیت کلید لامپ های خاموش به صورت متوالی، به محض سوختن فیوز می‌فهمیـم که کلید مورد نظر آخرین کلیدی است که وضعیت آن را تغییر داده‌ایم. و اما اگر فیوز بسته شده بسوزد می‌فهمیم که کلید مطلوب به یکی از لامپ های روشن متصل است، در این حالت کل لامپ ها را به دو دسته ۱۶ تایی تقسیم می‌کنیم و وضعیت کلید تمام ۱۶ لامپ دسته اول را تغییر داده و فیوز دوم را می‌بندیم که باز اگر فیوز بسوزد متوجه می‌شویم که کلید مطلوب در دسته ۱۶ تایی دوم قرار دارد و اگر فیوز دوم نسوزد می‌فهمیم که آن کلید در دسته ۱۶ تایی اول قرار دارد.
اگر به همین ترتیب دسته شناسایی شده را به دو دسته ۸ تایی و سپس ۴تایی،... تقسیم کنیم به جواب مورد نظر خواهیم رسید.

۲۷- چون خانه‌های ۱۲ و ۱۶ هر دو روشن هستند بنابراین تعداد خانه‌های خاموش متوالی حداکثر ۳ می‌تواند باشد.

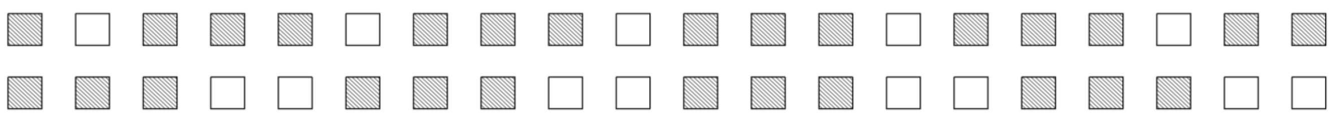
اگر $a=۱$ آنگاه b برابر ۳ می‌شود که شکل مربوطه به صورت زیر می‌شود:



اگر $a=۲$ آنگاه b برابر ۲ و یا ۳ می‌شود که در این حالت نیز اشکال مربوطه به صورت زیر خواهند بود:



اگر $a=۳$ آنگاه b برابر ۱ و یا ۲ می‌شود که در این حالت نیز اشکال مربوطه به صورت زیر خواهند بود:



۲۸- برای زوج مرتب (۱۰۵,۵۱۹) دنباله به شکل زیر وجود دارد:

$$\underbrace{-۱}_{۱},\underbrace{۵,۵,۵,\ldots,۵}_{\text{۱۰۴ تا}}$$

۲۹- معلوم است که برایند کار مانند آن است که در نهایت i سطر متمایز و j ستون متمایز انتخاب شده باشند. (ستون و یا سطرهایی که زوج بار، انتخاب شده باشند، مانند آن است که اصلا انتخاب نشده اند و ستون و یا سطرهایی که فرد بار انتخاب شده باشند مانند آن است که دقیقا یک بار انتخاب شده‌اند). از طرف دیگر چون ۱۳۸۳ فرد است بنابراین هر دو عدد i و j فرد هستند. تعداد خانه‌های سیاه در سطرهای iگانه برابر $۲۰۰۵-j$ و در سایر سطرها برابر j می‌باشد، بنابراین تعداد خانه‌های سیاه برابر است با:

$$x = i\times(۲۰۰۵-j)+(۲۰۰۵-i)\times j=۲۰۰۵(i+j)-۲ij$$

حداقل مقدار x به ازای $i=j=۱$ برابر با ۴۰۰۸ و حداکثر مقدار x به ازای $i=j=۱۳۸۳$ برابر ۱،۷۲۰،۴۵۲ به دست می‌آید که در بین گزینه‌ها فقط عدد موجود در گزینه «ج» در این محدوده است.

۳۰- حرکت بر روی سه نردبان از سمت راست به چپ را به ترتیب با a، b و c نمایش می‌دهیم. هدف مساله نوشتن دنباله‌ی ۷ حرفی با استفاده از سه حرف a،b و c می‌باشد به طوری که شروع دنباله با حرف a و نیز هیچ a و cای مجاور نباشند.

اگر تعداد دنباله‌های موجود در مرحله i ام را برابر x_i در نظر بگیریم به طوری که a_i تا از آنها ختم به a، b_i تا از آنها ختم به b و بالاخره c_i تا از آنها ختم به c باشند، آنگاه در مرحله بعدی به ازای هر دنباله‌ای که به b ختم می‌شود، ۳ دنباله جدید و نیز به ازای هر دنباله‌ای که به a و یا c ختم می‌شود ۲ دتباله جدید می‌تواند نوشت، بنابراین:

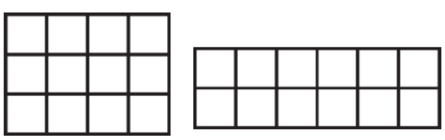
$$\left.\begin{aligned} a_{i+۱} &= a_i + b_i \\ c_{i+۱} &= c_i + b_i \\ b_{i+۱} &= a_i + b_i + c_i \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_{i+۱} = ۲(a_i + b_i + c_i) + b_i = ۲x_i + b_i$$

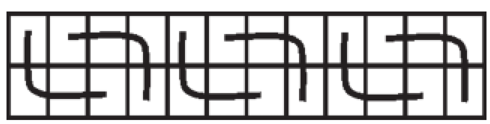
جدول a_i, b_i, c_i, x_i به ازای i از ۱ تا ۸ در جدول زیر آمده است:

i	a_i	b_i	c_i	x_i
۱	۱	۰	۰	۱
۲	۱	۱	۰	۲
۳	۲	۲	۱	۵
۴	۴	۵	۳	۱۲
۵	۹	۱۲	۸	۲۹
۶	۲۱	۲۹	۲۰	۷۰
۷	۵۰	۷۰	۴۹	۱۶۹
۸	۱۲۰	۱۶۹	۱۱۹	۴۰۸

۳۱- اولا معلوم می‌شود که کارت شماره i نمی تواند در کیسه i+۱ یا به بعد باشد زیرا در این صورت کارت های i+۱ و بزرگتر نیز در هیچ یک از کیسه های i و قبل از i قرار نخواهد گرفت که در چنین صورتی کیسه ای از کیسه های از ۱ تا i خالی می‌ماند . به همیـــن دلیل کارت شماره i در کیسه های i-۳ و به قبل نیز نمی تواند باشد. بنابراین کارت شماره ۱۳ در یکی از کیسه های ۱۱،۱۲ و یا ۱۳ قرار دارد. ابتدا کیسه ۱۲ را نگاه می‌کنیم که اگر کارت ۱۳ در آن بود، آن کارت پیدا شده است و اگر کارت ۱۲ در آن بود آنگاه کارت ۱۳ در کیسه ۱۳ قرار دارد و اگر کارت ۱۴ در آن باشد آنگاه کارت ۱۳ در کیسه ۱۱ قرار خواهد داشت.

۳۲- باید توجه داشت که تعداد خانه های شبکه مورد نظر هم مضرب ۴ است و هم مضرب ۶. بنابراین تعداد خانه های ان شبکه مضرب ۱۲ (ک.م.م دو عدد ۴ و ۶) است. شبکه ۱۲ خانه ای به یکی از دو صورت مقابل می‌باشد که قابل پوشش با موزائیـــک داده شده نمی باشند ولی شبکه ۲۴ خانه ای را که قرار دادن ۴ مستطیل ۳ × ۲ به شکل زیر به دست می‌آید، قابل پوشش می‌باشد:





۳۳- کوچکترین عدد داده شده برابر با ۴ می‌باشد. با ۴ بار وارون کردن به شکل مقابل می‌توان به دنباله صعودی رسید:

۳, ۱, ۴, ۵, ۲

۵, ۴, ۱, ۳, ۲

۲, ۳, ۱, ۴, ۵

۳, ۲, ۱, ۴, ۵

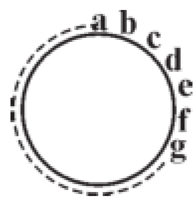
۱, ۲, ۳, ۴, ۵

۳۴- اگر n فرد باشد، آنگاه سه مکعب با ابعاد ۱،۱ و n به صورت عمودی، طولی و عرضی در وسط مکعب وجود دارد که قرینه آن مکعب ها نسبت مرکز اصلی مکعب خود آن مکعب ها می‌شود. در بقیه حالت ها قرینه هر مکعب با ابعـــاد ۱،۱ و n مکعب دیگری با همین ابعاد می شود. بنابراین اگر n زوج باشد، بازیکن دوم برنده می‌شود به این صورت که بازیکن اول هر حرکتی را انجام دهد او قرینه همان حرکت نسبت به مرکز اصلی مکعب را انجام می‌دهد و اگر n فرد باشد، بازیکن اول برنده می‌شود به این صورت که در ابتدا یکی از سه مکعب با ابعاد ۱،۱ و n که از مرکز مکعب می‌گذرد را برمی دارد و سپس بازیکن دوم هر حرکتی را انجام دهد بازیکن اول قرینه حرکت او نسبت به مرکز مکعب را انجام می‌دهد. بنابراین به ازای nهای فرد بازیکن اول و به ازای nهای زوج بازیکن دوم برنده می‌شود.

۳۵- الف) n=۵۱ و k=۴ اگرهیچ یک از افراد راستگو نباشند و همه افراد دروغگو باشند، آنگاه جمله مورد نظر در مورد همه افراد مصداق پیدا می‌کند.

اگر فردی مانند d رلستگو باشد، آنگاه برای آنکه جمله داده شده مصداق داسته باشد باید هر چهار نفر b,c,e و f دروغگو باشند که در این صورت نیز برای آنکه جمله مورد نظر در مورد دروغگوها مانند e مصداق داشته باشد، باید g راستگو باشد. بنابراین در این حالت از هر سه نفر متوالی دو نفر دروغگو و یک نفر راستگوست (یعنی به صورت ....رددرددردد...) و تعداد جای گشت ها در این مورد برابر ۳ است. با توجه به حالت بندی فوق در این قسمت r برابر ۴ به دست می‌آید که در صورت مساله نیز ۴ داده شده است.

ب) n=۵۰ و k=۰. اگر همه ی ۵۰ نفر راستگو باشند این حالت اتفاق می‌افتد بنابراین در این قسمت مقدار r برابر ۱ درمی آید در حالی که برابر ۰ داده شده است.



ج) n=۵۱ و k=۵. معلوم است که این حالت هرگز اتفاق نخواهد افتاد زیرا اگر حتی یک نفر راستگو در بین افراد باشد جمله داده شده در مورد او مصداق نخواهد داشت و اگر همه دروغگو باشند نیز جمله یاد شده در مورد آنها مصداق نخواهد داشت. بنابراین در این قسمت مقدار r برابر ۰ می‌شود در حالی که در صورت مساله این عدد برابر ۱ داده شده است.

د) n=۵۰ و k=۱ . تنها حالت ممکن آن است که همه دروغگو باشند، بنابراین r=۱ در حالی که در صورت مساله r برابر ۶ داده شده است.

هـ) n=۵۲ و k=۱. در این قسمت نیز تنها حالت ممکن آن است که همه دروغگو باشند، بنابراین r=۱ و در حالی که در صورت مساله r برابر ۶ داده شده است.

۳۶-

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{83} x_i 2^i &= \sum_{i=0}^{13}\left(1\times 2^5 + 1\times 2^4 - 1\times 2^3 - 1\times 2^2 + 1\times 2^1 - 1\times 2^0\right)\times 2^{6i}\\ &= \sum_{i=0}^{13}\left(1\times 2^5 + 0\times 2^4 + 0\times 2^3 + 0\times 2^2 + 0\times 2^1 + 1\times 2^0\right)\times 2^{6i}\\ &= (100101,100101,\ldots,100101)_2\end{aligned}$$

عدد حاصل که از ۱۴ سری متوالی از «۱۰۰۱۰۱» تشکیل شده است دارای ۴۲ عدد «۰» می‌باشد.

۳۷- اگر اعداد $a \le b \le c \le d$ مفروض باشند معلوم است بعد از سه مرحله به یک عدد خواهیم رسید که در بین همه ترکیب های قابل ساخت، ترکیب $2a + 4b + 8d + 8c$ از همه بزرگتر است (در عدد حاصل ابتدا دو عدد cوd با هم ترکیب شده اند و سپس عدد حاصل با b و در نهایت عدد جدید با a ترکیب شده اند). بنابراین الگوریتم مناسب برای ساختن بزرگترین عدد ممکن به شکل زیر می‌باشد:

$$1,1,1,1,1,1,1 \longrightarrow 1,1,1,1,1,4 \longrightarrow 1,1,1,1,10 \longrightarrow 1,1,1,22$$
$$\longrightarrow 1,1,46 \longrightarrow 1,94 \longrightarrow 190$$

۳۸- باقی مانده اعداد داده شده بر ۷ از چپ به راست به ترتیب برابر ۵،۴،۲،۲،۰،۰ و ۴ می‌باشد. اگر ماشین ها را از چپ به راست به ترتیب با f,e,d,c,b,a و g نام گذاری کنیم آنگاه باید a قبل از c,b قبل از d و بالاخره g بعد از دو ماشین f و e به پارکینگ وارد شوند که تعداد جای گشت های مورد نظر با شرط فوق برابر $\frac{7!}{2\times 2\times 3}$ یعنی ۴۲۰ به دست می‌آید.

۳۹- توصیه نامه های چهار استاد را به ترتیب با j,t,g و a نامگذاری می‌کنیم، بنابراین ۹ عدد g، ۸ عدد t، ۷ عدد j و ۶ عدد a وجود دارد که قرار است با آنها ۱۰ سری ۳ تایی بسازیم. تعداد g ها ۹ تا می‌باشد. بنابراین فقط یکی از ۳ تایی‌ها g ندارد که آن ۳ تایی به شکل tja می‌باشد. فقط دو سری از ۳ تایی ها t ندارند که آن ۳ تایی ها به شکل gja می‌باشند. فقط ۳ سری از ۳ تایی ها j ندارند که آن ۳ تایی ها به شکل gta می‌باشند و بالاخره فقط چهار سری از ۳ تایی ها a ندارند که آن ۳ تایی ها به شکل gtj می‌باشند. تعداد جای گشت های ۱۰ سری به دست آمده (که ۴ تا از آنها با هم، ۳ تا از آنها با هم و بالاخره ۲ تا از آنها نیز با هم مشابه هستند) برابر $\frac{10!}{4!\times 3!\times 2!\times 1!}$ یعنی ۱۲۶۰۰ می‌باشد.

۴۰- در کل سه نوع صفحه وجود دارد:

1. صفحات افقی
2. صفحات عمودی از نوع ۱
3. صفحات عمودی از نوع ۲

خط مورد نظر به ازای هر تلاقی با یکی از صفحات مورد اشاره، وارد یک مکعب جدید می‌شود. از طرف دیگر چون بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دوبه‌دوی اعداد ۹،۱۰ و ۷ برابر ۱ می‌باشد، بنابراین خط مورد نظر هیچ دو صفحه‌ای را مشترکا در یک نقطه قطع نمی‌کند. تعداد صفحات افقی، عمودی از نوع ۱ و عمودی از نوع ۲ (بدون احتساب صفحات اول و آخر) به ترتیب برابر ۸، ۹ و ۶ می‌باشد که مجموعا ۲۳ صفحه می‌شود و خط مورد نظر هر یک از آن ۲۳ صفحه را دقیقا در یک نقطه قطع می‌کند که بانقطه شروع مجموعا ۲۴ نقطه می‌شوند (از بین دو نقطه شروع و پایان باید یکی ازآن دو را شمرد). چون تعداد مکعب‌های مورد نظر با تعداد نقاط تلاقی برابر است، بنابراین جواب مورد نظر ۲۴ می‌شود.